Daniel Audet

Utilisation de quaternions pour effectuer des rotations

Exemple pratique :

- On désire tourner le vecteur ***p*** = (1, 2, 0) d'un angle de 60^o autour de l'axe des Z

Étape 1 :

- Déterminez le quaternion unitaire de la forme $\cos\Theta + (v_x\sin\Theta)\,\mathbf{i} + (v_y\sin\Theta)\,\mathbf{j} + (v_z\sin\Theta)\,\mathbf{k}$ permettant d'effectuer la rotation.

  a) L'angle sera $\Theta = 60/2 = 30^o$ ($\cos\Theta = 0.87$ et $\sin\Theta = 0.5$)

  b) L'axe de rotation est $(v_x, v_y, v_z) = (0, 0, 1)$ (note: le vecteur doit être unitaire)

  c) Le quaternion q sera donc

  $$q = \cos\Theta + (v_x\sin\Theta)\,\mathbf{i} + (v_y\sin\Theta)\,\mathbf{j} + (v_z\sin\Theta)\,\mathbf{k} = 0.87 + (0)\,\mathbf{i} + (0)\,\mathbf{j} + (0.5)\,\mathbf{k}$$

Étape 2 :

- Déterminez le quaternion inverse q^{-1}

On obtient le quaternion inverse d'un quaternion unitaire en inversant le signe de la partie vectorielle, c'est-à-dire

$$q^{-1} = 0.87 - (0.5)\,\mathbf{k}$$

- Calculez le produit $q\,p\,q^{-1}$ (attention à l'ordre des multiplications …$\mathbf{ij} \neq \mathbf{ji}$ …etc)

$$(0.87 + 0.5\,\mathbf{k})\,(1\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k})\,(0.87 - 0.5\,\mathbf{k}) =$$

$$(0.87\,\mathbf{i} + 1.74\,\mathbf{j} + 0.5\,\mathbf{ki} + 1\,\mathbf{kj})\,(0.87 - 0.5\,\mathbf{k}) =$$

$$(0.87\,\mathbf{i} + 1.74\,\mathbf{j} + 0.5\,\mathbf{j} - 1\,\mathbf{i})\,(0.87 - 0.5\,\mathbf{k}) =$$

$$(-0.13\,\mathbf{i} + 2.24\,\mathbf{j})\,(0.87 - 0.5\,\mathbf{k}) =$$

$$(-0.11\,\mathbf{i} + 0.07\,\mathbf{ik} + 1.94\,\mathbf{j} - 1.12\,\mathbf{jk}) =$$

$$(-0.11\,\mathbf{i} - 0.07\,\mathbf{j} + 1.94\,\mathbf{j} - 1.12\,\mathbf{i}) =$$

$$(-1.23\,\mathbf{i} + 1.87\,\mathbf{j})$$

Résultat : L'extrémité du nouveau vecteur ***p'*** sera donc localisé en (-1.23 , 1.87)

<u>Vérification :</u>

- L'angle entre le vecteur ***p*** et l'axe des X positif est α = atan (2/1) = 63.4^{o}
- L'angle entre le vecteur ***p'*** et l'axe des X négatif est β = atan (1.87/1.23) = 56.6^{o}
- Ainsi, $\alpha + \beta = 120^{o}$
- Donc, l'angle entre le vecteur ***p*** et ***p'*** est $180^{o} - 120^{o} = 60^{o}$