Disponible en version pdf
sur le site WEB du cours

# Résumé

Courbes paramétriques décrites à l'aide de polynômes cubiques

$$p(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3$$

$$= \sum_{k=0}^{3} c_k u^k$$

$$= u^T c$$

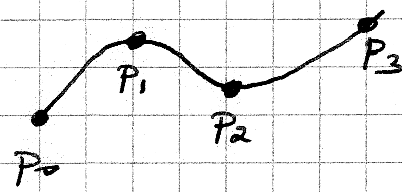
où $u = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix}$

$c = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

Donc, $p(u) = u^T c = \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

# Résumé:

## Interpolation




$$p(u) = u^T C = u^T M_I P$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5.5 & 9 & -4.5 & 1 \\ 9 & -22.5 & 18 & -4.5 \\ -4.5 & 13.5 & -13.5 & 4.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_0(u) & b_1(u) & b_2(u) & b_3(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

où $b_0(u) = 1 - 5{,}5u + 9u^2 - 4{,}5u^3$

$$b_1(u) = 9u - 22{,}5u^2 + 13{,}5u^3$$

$$b_2(u) = -4{,}5u + 18u^2 - 13{,}5u^3$$

$$b_3(u) = u - 4{,}5u^2 + 4{,}5u^3$$

Exemple d'application (interpolation)

Trouver les coordonnées $(x, y, z)$ du point $P(u=0.1)$ sur la courbe d'interpolation reliant les points $P_0 = (1, 2, 0)$, $P_1 = (4, 5, 0)$, $P_2 = (8, 3, 0)$ et $P_3 = (10, 5, 0)$.

$$u = 0.1 \Rightarrow b_0(u=0.1) = 1 - 5.5(0.1) + 9(0.1)^2 - 4.5(0.1)^3$$
$$= 1 - 0,55 + 0,09 - 0,0045 = 0,5355$$

$$b_1(u=0.1) = 9(0.1) - 22.5(0.1)^2 + 13,5(0.1)^3$$
$$= 0,9 - 0,225 + 0.0135 = 0,6885$$

$$b_2(u=0.1) = -4.5(0.1) + 18(0.1)^2 - 13,5(0.1)^3$$
$$= -0.45 + 0,18 - 0.0135 = -0,2835$$

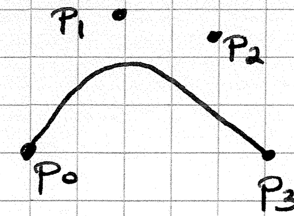
$$b_3(u=0.1) = 0.1 - 4,5(0.1)^2 + 4.5(0.1)^3$$
$$= 0,1 - 0,045 + 0.0045 = 0,0595$$

Donc,

$$P_x(u=0.1) = \begin{bmatrix} 0.5355 & 0.6885 & -0.2835 & 0,0595 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = 1,62$$

$$P_y(u=0.1) = \begin{bmatrix} 0.5355 & 0.6885 & -0.2835 & 0,0595 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 3,96$$

$$P_z(u=0.1) = \begin{bmatrix} 0.5355 & 0.6885 & -0.2835 & 0.0595 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$




# Bézier

$$p(u) = u^T c = u^T M_B P$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_0(u) & b_1(u) & b_2(u) & b_3(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

où $b_0(u) = 1 - 3u + 3u^2 - u^3 = (1-u)^3$

$b_1(u) = 3u - 6u^2 + 3u^3 = 3u(1-u)^2$

$b_2(u) = 3u^2 - 3u^3 = 3u^2(1-u)$

$b_3(u) = u^3$

## Exemple d'application (Bézier)

Trouver les coordonnées $(x, y, z)$ du point $P(u=0.2)$ sur la courbe de Bézier définie par les points de contrôle $P_0 = (1,2,0)$, $P_1 = (4,5,0)$, $P_2 = (8,3,0)$ et $P_3 = (10,5,0)$.

$$u = 0.2 \Rightarrow \begin{aligned} b_0(u=0.2) &= (1-0.2)^3 &&= 0.512 \\ b_1(u=0.2) &= 3(0.2)(1-0.2)^2 &&= 0.384 \\ b_2(u=0.2) &= 3(0.2)^2(1-0.2) &&= 0.096 \\ b_3(u=0.2) &= (0.2)^3 &&= 0.008 \end{aligned}$$

On peut noter que la somme de ces quatre valeurs donne 1.
(cas particulier des courbes Bézier)

Donc,

$$P_x(u=0.2) = \begin{bmatrix} 0.512 & 0.384 & 0.096 & 0.008 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = 2.89$$

$$P_y(u=0.2) = \begin{bmatrix} 0.512 & 0.384 & 0.096 & 0.008 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 3.27$$

$$P_z(u=0.2) = \begin{bmatrix} 0.512 & 0.384 & 0.096 & 0.008 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

# Calculs pour une surface de Bézier

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} b_i(u)\, b_j(v)\, p_{ij}$$

↳ voir Présentation 14.3
diapositive #11

Après avoir décider du nombre de points à calculer pour toute la surface $N_{Tot} = N_u \times N_v$

Ex: $100 = 10 \times 10$

on peut déduire le pas (l'incrément) dans chacune des directions

$$\Delta u = \frac{1}{N_u} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$\Delta v = \frac{1}{N_v} = \frac{1}{10} = 0.1$$

Note: on a avantage à choisir des pas identiques.

On calculera ensuite la valeur des fonctions de mélange ("blending functions") en faisant varier $u$ de 0 à 1 par incrément de 0.1. On fera de même pour $v$ (de 0 à 1 par incrément de 0.1)

Ceci nous donnera 4 vecteurs pour $u$

$$b_0[\ ],\ b_1[\ ],\ b_2[\ ] \text{ et } b_3[\ ]$$

pour $u$. Il en sera de même pour $v$.

Ces vecteurs auront une longueur $\underset{\downarrow\, 10}{N_u}$ et $\underset{\downarrow\, 10}{N_v}$ respectivement.

Si on a choisi un incrément identique pour $u$ et $v$, cela simplifiera les calculs par la suite. car les 4 vecteurs seront les mêmes dans les deux cas.

On utilisera alors les 4 vecteurs de la manière suivante pour calculer les coordonnées des points sur la surface de Bézier.

$$P_x[U,V] = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} b_i[U]\, b_j[V]\, (P_{ij})_x$$

où $U = 0$ à $(N_u - 1)$ i.e. $0$ à $9$

$V = 0$ à $(N_v - 1)$ i.e. $0$ à $9$

et $P_{ij}$ sont les point de contrôle de la surface

$(P_{ij})_x \Rightarrow$ valeur de la coord. en $x$

$P_y[U,V]$ et $P_z[U,V]$ seront calculés de manière similaire ($(P_{ij})_y$ et $(P_{ij})_z$ seront alors employés.